

Économie de la stratégie

Théorie des jeux

Introduction

La théorie des jeux est l'étude des situations dans lesquelles les gains d'un agent dépendent non seulement de ses actions, mais aussi de celles des autres.

La théorie des jeux est à l'origine de certaines des connaissances économiques les plus puissantes :

Cela nous aide à mieux comprendre le monde lorsque nous nous mettons à la place de quelqu'un d'autre.

Ce chapitre vous permettra de mieux comprendre **comment choisir une stratégie** qui soit **la meilleure réponse** aux stratégies des autres.

Nous appliquons la théorie des jeux à de nombreuses situations, dont la pollution, le football et la publicité, pour n'en citer que quelques-unes.

Trois éléments dans chaque jeu

1. Joueurs

» *deux ou plus pour la plupart des jeux*

2. Stratégies disponibles pour chaque joueur

» *comprennent un plan complet décrivant comment un joueur va agir.*

3. Profits

» *représente les gains pour chaque action que les joueurs peuvent entreprendre.*

» *Les gains sont basés sur votre (vos) décision(s) et celle(s) des autres.*

Notion d'équilibre de Nash (stratégique)

Une combinaison de stratégies est un **équilibre de Nash**.

» *si chaque joueur choisit une stratégie qui est la meilleure réponse aux stratégies des autres, c'est-à-dire que les joueurs choisissent des stratégies qui sont des meilleures réponses mutuelles.*

La stratégie d'un joueur est la **meilleure réponse** aux stratégies des autres joueurs :

» *si, en prenant la stratégie des autres joueurs comme donnée, elle lui donne des gains plus importants que toute autre stratégie disponible.*

Cette notion d'équilibre dépend de deux facteurs essentiels :

1. que tous les joueurs comprennent le jeu et les gains associés à chaque stratégie (afin qu'ils choisissent ce qui est le mieux pour eux).
2. que tous les joueurs comprennent que les autres joueurs comprennent le jeu.

Jeux simultanés

Le dilemme du prisonnier

Imaginez que vous êtes dans la peau d'une personne qui vient de commettre un vol à main armée dans une banque - en d'autres termes, vous êtes le voleur. Supposons que vous ayez un complice. Vous êtes tous deux pris dans le véhicule de fuite, mais avant d'être appréhendés, vous jetez tous deux vos armes dans un collecteur d'eaux pluviales. La police vous emmène tous les deux au poste de police et vous place dans des salles d'interrogatoire séparées. Lorsque les détectives entrent dans votre chambre, ils vous présentent une série de trois options et vous disent qu'ils donnent à votre partenaire les mêmes trois options :

1. Si aucun de vous n'avoue avoir eu une arme lors du crime, vous risquez tous deux une peine de prison de 2 ans pour le vol.
2. Si l'un d'entre eux avoue être en possession d'une arme à feu, le confesseur est libéré et l'autre purge une peine de prison substantielle - 10 ans.
3. Si vous avouez tous les deux avoir une arme, la peine de prison sera négociée à 5 ans.

Que feriez-vous ?

		Votre complice	
		Confesser	Garder le silence
Vous	Confesser	(5, 5)	(0, 10)
	Garder le silence	(10, 0)	(2, 2)

- Une stratégie dominante est la meilleure réponse à toutes les stratégies possibles du ou des autres joueurs.
 - » *avouer est une stratégie dominante car c'est votre meilleure réponse à tout choix de stratégie de votre partenaire.*
 - » les deux joueurs devraient se confesser car se confesser est une stratégie dominante pour chaque joueur
- L'équilibre de Nash conduit à un résultat qui n'est pas le meilleur pour les deux joueurs.
 - » *Même si votre complice et vous-même seriez mieux lotis si vous gardiez le silence, l'équilibre stratégique dominant est que vous avouiez tous les deux !*
 - » *Cette situation est au cœur du paradoxe que l'on appelle le "dilemme des prisonniers".*

- Mais s'ils avaient pu coopérer, ils auraient gardé le silence et tous deux auraient été condamnés à des peines de deux ans.
 - » *C'est ce qu'on appelle l'équilibre coopératif*
- La solution coopérative est peut-être réalisable mais c'est un **équilibre instable** !
- Exemple :
 - Split ou Steal = Golden balls:
https://www.youtube.com/watch?v=7FbkwrhW_0I (voir à partir de 4:10)
- Les outils nécessaires étant en place, nous pouvons maintenant commencer à étudier certaines des façons dont nous appliquons la théorie des jeux pour comprendre les problèmes du monde réel.

Plus d'informations sur la structure du jeu

- Le dilemme du prisonnier est un exemple de **jeu simultané**.
 - » *tous les joueurs choisissent leurs actions simultanément, avant de connaître les actions choisies par les autres joueurs*
- Dans l'exemple précédent, le résultat (confesser, confesser) est connu comme un **équilibre de stratégie dominante**.
- On peut montrer qu'un équilibre de stratégie dominante dans n'importe quel jeu est toujours un équilibre de Nash :
 - » *Si les deux joueurs choisissent leurs stratégies strictement dominantes, il est impossible pour un joueur d'améliorer son gain en changeant sa stratégie, compte tenu de la stratégie choisie par l'autre joueur.*
- L'inverse de l'affirmation précédente n'est pas vrai :
 - » *un équilibre de Nash n'est pas nécessairement un équilibre de stratégie dominante. Voir l'exemple suivant*

Jeu publicitaire

- Les entreprises A et B doivent décider simultanément de leurs dépenses publicitaires.
- Ils ont le choix entre trois niveaux : Bas, Moyen, ou Haut.
- Les gains des deux entreprises résultant de la campagne publicitaire dépendent de leurs propres dépenses et de celles de l'autre entreprise.

		Firm B's budget		
		<i>Low</i>	<i>Medium</i>	<i>High</i>
Firm A's budget	Low	40 40	35 45	10 25
	Medium	35 35	45 30	15 20
	High	30 25	25 15	20 30

- Pas de stratégies strictement dominantes ;

- MAIS, (High, High) est un équilibre de Nash.

Jeu d'entrée avec une stratégie faiblement dominante

- Un autre concept de dominance est la **dominance faible** :
 - » le cas où un joueur peut identifier une stratégie qui est au moins aussi bonne que toute autre stratégie, pour toutes les stratégies que l'autre joueur peut choisir,
 - » et meilleure que toute autre stratégie pour au moins une stratégie que l'autre joueur peut choisir.

		Firm B's strategies	
		Entry	No entry
Firm A's strategies	Accommodate	2, 4	3, 3
	Fight	1, 1	3, 3

- L'entreprise A est une firme établie et l'entreprise B est un entrant potentiel. Dans ce jeu simultané, l'entreprise B choisit d'entrer ou non sur le marché, et l'entreprise A prévoit de s'adapter à l'arrivée de B au cas où elle entrerait, ou de déclencher une guerre des prix. Pour se doter de la capacité de mener une guerre des prix, A devra prendre certaines mesures irréversibles, avant de connaître la décision de B. Toutefois, ces mesures n'imposeront aucun coût supplémentaire à A dans le cas où B déciderait de ne pas entrer sur le marché et où A garderait l'ensemble du marché pour lui.

- Ici, A a une stratégie faiblement dominante
- B n'a ni une stratégie strictement dominante ni une stratégie faiblement dominante.
- le résultat du jeu est plus difficile à prévoir :
 - » *L'entreprise A peut opter pour la stratégie faiblement dominante d'adaptation, auquel cas B préfère l'entrée.*
 - » *Par ailleurs, A peut décider de se battre, auquel cas B préfère ne pas participer.*
- Il est difficile d'être certain de la tournure que prendra ce jeu, car il existe **deux équilibres de Nash**.
- Les deux solutions (Accomoder, Entrer) et (Combattre, Pas d'entrée) satisfont à l'exigence d'un équilibre de Nash.

- Comment pouvons-nous résoudre ce problème ? Nous pouvons utiliser le concept d'**équilibre mixte de Nash** :
 - Une stratégie mixte consiste à rendre aléatoire le choix entre deux ou plusieurs options, avec des probabilités définies pour chaque option.
- Supposons que l'entreprise A attribue une probabilité de x au choix de Accommoder, et une probabilité de $(1 - x)$ au choix de Combattre. Les gains attendus de B (en termes de x) sont les suivants :
 - Si B choisit Entrée, les gains possibles de B sont 4 (si A choisit Accueillir, avec une probabilité de x) et 1 (si A choisit Combattre, avec une probabilité de $1 - x$). Le gain attendu de B est $4x + 1(1 - x) = 1 + 3x$.
 - Si B choisit de ne pas participer, les gains possibles de B sont de 3 (si A choisit de s'adapter) et de 3 (si A choisit de se battre). Le gain attendu de B est $3x + 3(1 - x) = 3$.

- Pour identifier l'équilibre de Nash de la stratégie mixte, nous devons trouver la plage de valeurs pour x , qui fait de l'absence de participation la meilleure réponse pour B.
- En d'autres termes, nous devons trouver x tel que $3 > 1 + 3x$. Par conséquent, Aucune entrée est la meilleure réponse pour B pour tout $x < 2/3$.
- Tout résultat dans lequel A suit une stratégie mixte avec $x < 2/3$ et B suit une stratégie "pure" de Non entrée est un **équilibre de Nash à stratégie mixte**.

Jeux séquentiels

- Dans les jeux que nous avons examinés jusqu'à présent, les joueurs agissent simultanément et décident de leurs stratégies et actions avant de savoir quelles stratégies et actions ont été choisies par leurs rivaux.
- Cependant, il existe d'autres jeux dans lesquels les décisions des joueurs suivent une séquence :
 - Un jeu dans lequel les joueurs choisissent leurs actions à tour de rôle, de sorte qu'un joueur qui se déplace plus tard connaît les actions qui ont été choisies par les joueurs qui se sont déplacés plus tôt, est appelé **un jeu séquentiel**,
 - Un joueur prend sa décision, et l'autre joueur observe cette décision avant de donner sa réponse.
- Pour un jeu séquentiel, il est pratique de représenter les choix auxquels les joueurs sont confrontés sous la forme d'un arbre de jeu.

Les céréales pour petit-déjeuner jouent avec l'avantage du premier arrivé

- Supposons que deux producteurs de céréales pour petit-déjeuner envisagent tous deux de lancer un nouveau produit.
- Chacun d'entre eux a le choix de lancer l'un des deux produits suivants : l'attrait de l'un est le "croustillant", et celui de l'autre est le "fruité".
- Nous supposons que les céréales croquantes sont plus populaires auprès des consommateurs que les céréales fruitées.

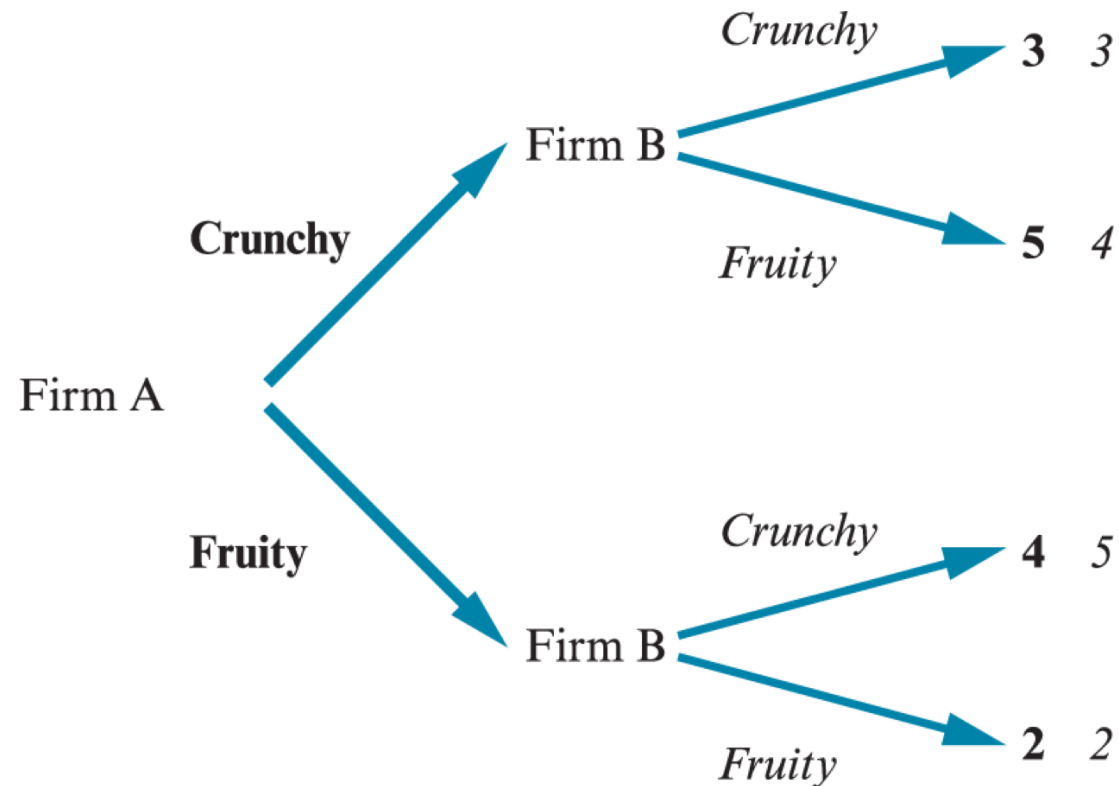
- Voici la matrice des gains, en supposant que les deux entreprises agissent simultanément, sans savoir ce que prévoit leur rival.

La terminologie équivalente pour la matrice de gain est la matrice **stratégique** représentation de la forme.

		Firm B's strategies	
		<i>Crunchy</i>	<i>Fruity</i>
Firm A's strategies	Crunchy	3 3	5 4
	Fruity	4 5	2 2

- 2 Équilibres de Nash :
- Si B produit du "croustillant", il est préférable que A produise du "fruité", mais si B produit du "fruité", il est préférable que A produise du "croustillant".

- Dans un jeu séquentiel, où A est le premier à lancer son nouveau produit et où B réagit ensuite, le résultat est différent.



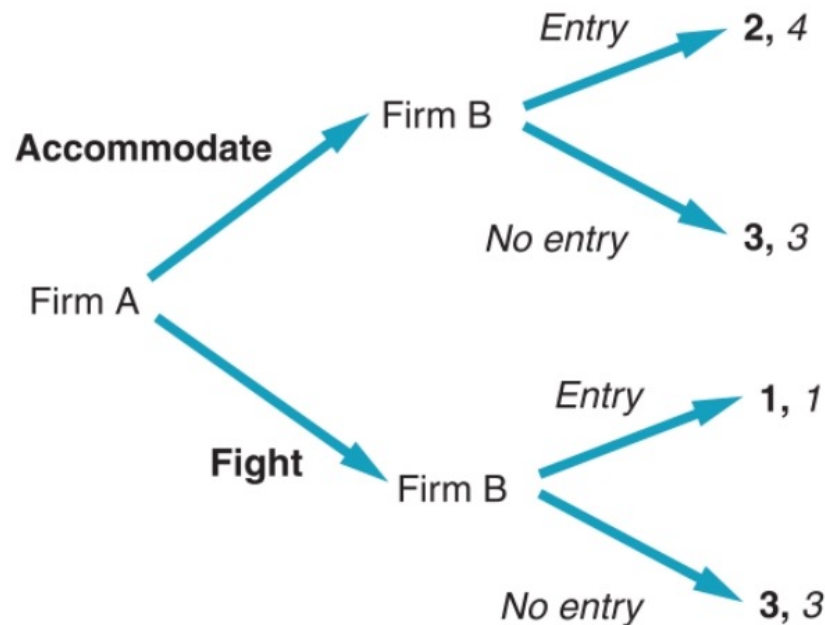
- B produit "fruité" et obtient le gain inférieur de 4.
- A finit avec le gain le plus élevé parce que A bénéficie d'un avantage de premier arrivé.
- (Crunchy, Fruity) est un **équilibre parfait de sous-jeu** (SPE).
- Un SPE est un équilibre de Nash, mais tous les équilibres de Nash ne sont pas des SPE !

Jeu d'entrée avec une stratégie faiblement dominante

- Lors de notre précédente rencontre avec ce jeu, nous avons établi qu'il existait plusieurs issues possibles, sur la base du critère de l'équilibre de Nash.
- Supposons maintenant que ce jeu soit joué comme un jeu séquentiel, dans lequel la firme A ou la firme B joue en premier, et l'autre firme observe le premier coup avant de prendre sa décision.
- Il s'avère qu'il est beaucoup plus facile de prédire un résultat pour le jeu séquentiel que pour le jeu simultané équivalent !

Supposons que l'entreprise A soit la première à agir !

Firm A as first mover



La représentation arborescente est également appelée **représentation sous forme extensive**.

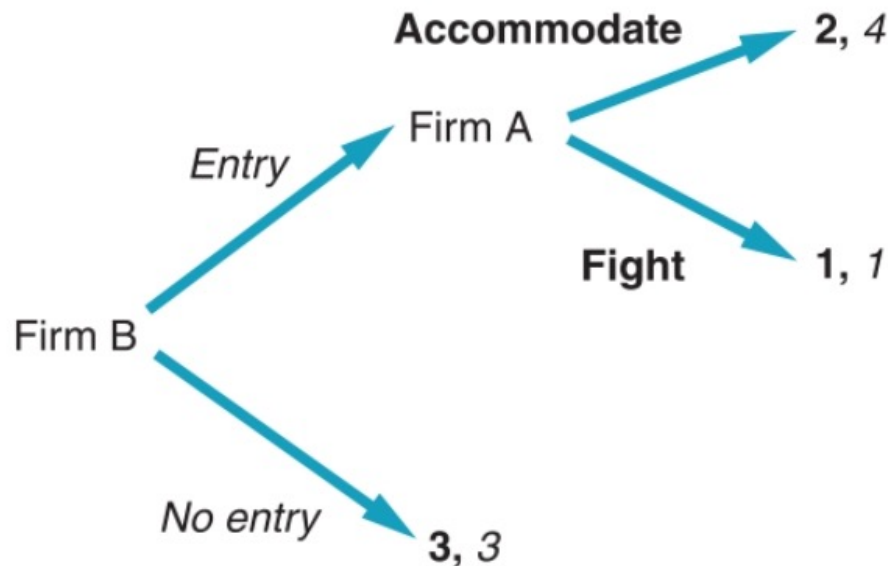
- Si A choisit Accueillir, le gain de B de 4 pour Entrée dépasse le gain de B de 3 pour Pas d'entrée, donc B choisit Entrée et A gagne un gain de 2.
- Si A choisit le combat, le gain de 3 de B pour la non-entrée est supérieur au gain de 1 de B pour l'entrée, donc B choisit la non-entrée et A gagne un gain de 3.

Figure 9.15 Entry game: extensive form representation

- Par conséquent, A choisit le Combat, le résultat est (Combat, Pas d'entrée), et les gains sont (3, 3).
- Le résultat est appelé équilibre parfait de sous-jeu (SPE).

Supposons que l'entreprise B soit la première à agir !

Firm B as first mover



A peut maintenant ne pas prendre la décision d'investir dans de nouvelles capacités avant d'avoir observé la décision de B d'entrer ou non sur le marché.

- Si B choisit Entrée, le gain de 2 de A pour Accueillir dépasse le gain de 1 de A pour Combattre, donc A choisit Accueillir et B gagne un gain de 4.
- Si B choisit Aucune participation, le gain de 3 de A est le même pour Accueillir et Combattre, et B gagne un gain de 3 quelle que soit la stratégie choisie par A.
- Par conséquent, B choisit Entrée, le résultat est (Accueillir, Entrée), et les gains sont (2, 4). Ce résultat est un SPE pour le jeu séquentiel avec B comme premier intervenant.



Pas à l'examen

Jeux répétés

- Dans la discussion précédente sur le dilemme du prisonnier à période unique et d'autres jeux, on suppose que le jeu n'est joué qu'une seule fois.
- Cependant, certains jeux peuvent être joués à plusieurs reprises par les mêmes joueurs.

Pas à l'examen

Considérons un marché oligopolistique :

1. Peu de vendeurs proposant des produits similaires ou identiques
2. Interdépendance stratégique entre les entreprises
3. Il est préférable de coopérer et d'agir comme un monopoliste en produisant une petite quantité de produits et en facturant un prix supérieur au coût marginal.

Un cartel peut être considéré comme un dilemme de prisonnier.

Le jeu de l'oligopole

Pas à l'examen

Entreprise B	
Haute production	Faible production
Entreprise A	
Haute production	(5,5)
Faible production	(10,10)

- (Production élevée, Production élevée) est un équilibre de stratégie dominante
 - L'intérêt personnel fait qu'il est difficile pour l'oligopole de maintenir un résultat coopératif avec une faible production, des prix élevés et des bénéfices monopolistiques.
- Pas à l'examen**
- Cependant :
 - Les entreprises qui se soucient des profits futurs pourraient finir par coopérer dans les jeux répétés plutôt que de tricher, comme le montre le jeu simultané ci-dessus.

Partons du principe que le jeu peut être joué à l'infini :

- Si les entreprises A et B s'entendent et respectent leur promesse, leur séquence de profit sera égale à : $\{10, 10, 10, \dots\}$
- Cependant, si l'une des entreprises choisit la stratégie non coopérative à un moment donné, l'autre entreprise réagira et punira cette action en choisissant la stratégie non coopérative jusqu'à la fin du temps.

» Ainsi, si l'une des entreprises, disons l'entreprise B, à un moment donné, rompt le cartel, elle recevra 15 comme récompense pour cette période et gagnera ensuite 5 jusqu'à la fin du temps. Pourquoi ? Parce que l'entreprise A punira B en produisant une quantité élevée au cours des périodes suivantes, c'est-à-dire en lui faisant une concurrence féroce pour toujours.

» La séquence de profit de l'entreprise B serait donc égale à $\{15, 5, 5, \dots\}$.

- Étant donné que des bénéfices différents à des dates différentes sont différents (consultez vos notes sur la valeur actuelle), nous avons besoin d'un taux d'actualisation pour pouvoir convertir les bénéfices futurs en valeur actuelle. Utilisons le taux d'actualisation suivant ρ :

$$0 < \rho < 1$$

- La collusion donnerait donc le profit suivant en valeur actuelle :

$$10 + \rho 10 + \rho^2 10 + \rho^3 10 + \dots$$

- Et la tricherie céderait :

$$15 + \rho 5 + \rho^2 5 + \rho^3 5 + \dots$$

Faisons un peu de mathématiques : La somme d'une série géométrique infinie

$$a + a\rho + a\rho^2 + a\rho^3 + a\rho^4 + a\rho^5 + \dots \quad \text{avec } 0 < \rho < 1$$

est égal à : $\frac{a}{1-\rho}$

En appliquant à notre exemple la formule de calcul d'une suite infinie avec un facteur d'actualisation $0 < \rho < 1$, on obtient :

$$\frac{10}{1-\rho} \quad \text{comme profit total de la coopération (collusion)}$$

$$\begin{aligned} &15 + 5\rho + 5\rho^2 + 5\rho^3 + 5\rho^4 + \dots \\ &= 15 + \rho(5 + 5\rho + 5\rho^2 + 5\rho^3 + \dots) \end{aligned}$$

et
Pas à l'examen

$$= 15 + \rho \left(\frac{5}{1-\rho} \right) \quad \text{comme profit de la déviation (c'est-à-dire la rupture du cartel)}$$

Les entreprises maintiendront donc un cartel si et seulement si :

$$\frac{10}{1-\rho} \geq 15 + \frac{5\rho}{1-\rho} \quad \Leftrightarrow \quad \rho \geq \frac{1}{2}$$

Enfin, si les entreprises sont suffisamment patientes !